

XI. Erdélyi Tudományos Diákköri Konferencia
Matematika szekció

Poncelet záródási tétele

Szerző

Nagy Örs, BBTE, MIK
Matematika-informatika szak, IV. év

Témavezető

Dr. András Szilárd, adjunktus
BBTE, MIK, Differenciálegyenletek Tanszék

Kolozsvár, 2008. május 23-24.

Tartalomjegyzék

1. Záródási tételek	4
1.1. Cikk-cakkok	4
1.2. A Ponzag szerkesztés	7
1.3. A Poncelet szerkesztés	9
2. A Poncelet tétel	13
2.1. A Poncelet-tétel születése	13
2.2. A Poncelet-tétel elemi bizonyítása	15
2.3. Poncelet általános tétele	19
3. A matematikai inga és a Poncelet-tétel	21
3.1. A matematikai inga pályája	21
3.2. A matematikai inga és az elliptikus integrálok kapcsolata	23
3.3. A Poncelet poligonok	25
A. Függelék. Cayley-tétele körökre	26
B. Függelék. Körsorok	28

Bevezetés

Jean-Victor Poncelet francia hadmérnök-tábornok, Napóleon oroszországi hadseregében szolgált. 1812 telén a „nagy armada” veresége után orosz fogságba esett. A rabságban felelevenítette magában az egyetemi tanulmányait, olvasmányait. Szellemi közegtől elzártan a geometria új területeit fedezte fel, s elméjében furcsa körtáncra indultak a poligonok. 1814 szeptemberében szabadult és visszatért Franciaországba. A fogságban fogant gondolatai 1822-ben jelentek meg „Értekezés az alakzatok projektív tulajdonságairól” címmel. Ebben a művében jelent meg a következő tétel:

Adottak az egymást nem érintő e és a körök, a az e belsejében. Az e körön tetszőlegesen választott A_0 pontból indulva megszerkeszthetjük az e kör A_1, A_2, A_3, \dots pontjait úgy, hogy $A_0A_1, A_1A_2, A_2A_3 \dots$ egyenesek érintsék az a kört és bármely két, a sorban egymást követő egyenes különbözzék egymástól. Előfordulhat, hogy bizonyos számú lépésben visszajutunk a kezdőpontba, azaz $A_n = A_0$. Ekkor az e kör bármely másik pontjából indulunk is ki, biztosan visszatérünk a kezdőpontba, mégpedig ugyanannyi lépésben, mint előzőleg.

Koncentrikus körök esetén a tétel állítása triviálisan teljesül, minden más esetben azonban meglehetősen nehéz a bizonyítás. A bizonyításnál talán még nehezebb azt megmondani, hogy milyen legyen a két kör helyzete ahhoz, hogy egyáltalán ilyen visszatérés (záródás) bekövetkezzen. Egyáltalán nem könnyű arra válaszolni, hogy mekkora legyen az említett két kör sugara, illetve a körök középpontjainak távolsága ahhoz, hogy a tételben leírt szerkesztés adott n lépésben záródjon. Ezekre a kérdésekre a tétel nem ad választ. Az elmúlt két évszázadban több matematikus (Fuss 1792, Steiner 1827, Richelot 1830, Jacobi 1881, Chaundy 1923, Kerawala 1947) is foglalkozott a fenti kérdésekkel; eredményeik már $n \geq 5$ értékeire pontos, de nagyon bonyolult megoldást adnak. Így nem meglepő, hogy az idők folyamán közelítő megoldásokkal is próbálkoztak. Weill 1878-ben talált egy algoritmust, amely közelítő megoldást ad páros n -ek esetén.

A következő három fejezetben mi is ezt a kérdéskört járjuk körül. Az első fejezet végtelen periodikus szerkesztési eljárásokat és ezekhez kapcsolódó záródási tételeket mutat be. A második fejezetben megadjuk a Poncelet-tétel két meglehetősen különböző bizonyítását. A harmadik fejezet a dolgozathoz tartozó, MATLABban írt, a matematikai inga mozgását felhasználó program elméleti hátterébe nyújt bepillantást. A program segítségével közelítő megoldást mutatunk a záródás bekövetkezésére tetszőleges n esetén.

1. Záródási tételek

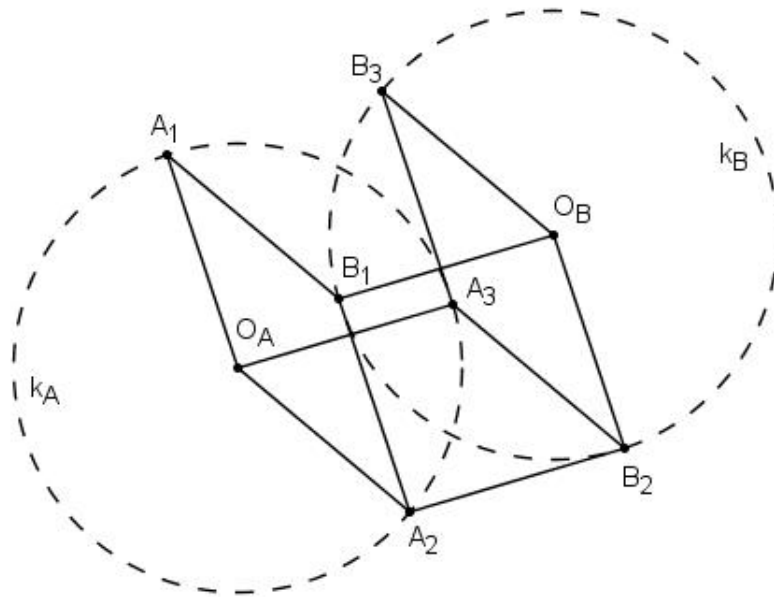
Ebben a fejezetben végtelen, periodikus szerkesztési eljárásokkal foglalkozunk.

1.1. Cikk-cakkok

1.1. Feladat. Adottak a k_A, k_B r sugarú körök, melyek nem mennek át egymás középpontján. Továbbá adott az A_1 pont a k_A -n, és B_1 a k_B -n úgy, hogy az A_1B_1 szakasz éppen r hosszúságú. Szerkesszünk meg az $A_1, B_1, A_2, B_2, \dots$ egyenlő oldalú poligont a következő eljárás szerint:

- A_{n+1} legyen k_A -nak a B_n -től r távolságra levő, A_n -től különböző pontja; illetve legyen $A_{n+1} = A_n$, ha nincs ilyen A_n -től különböző pont.
- B_{n+1} legyen k_B -nek az A_{n+1} -től r távolságra levő, B_n -től különböző pontja; illetve legyen $B_{n+1} = B_n$, ha nincs ilyen B_n -től különböző pont.

Bizonyítsuk be, hogy $A_4 = A_1$!

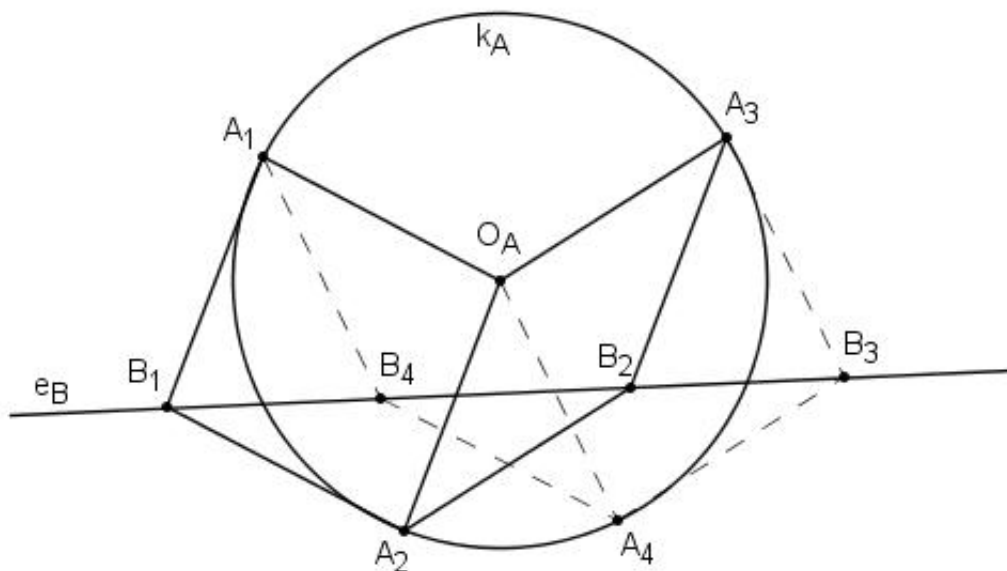


1. ábra. Az 1.1 feladat megoldása

Megoldás: Az 1. ábrán a k_A, k_B körök középpontjait O_A, O_B -vel jelöltük és a feltüntetett szakaszok mind r hosszúságúak. Azt kell bebizonyítani, hogy B_3A_1 hossza is éppen r . Mivel az $A_1B_1A_2O_A, O_A A_2B_2A_3, A_3B_2O_B B_3$ négyszögek mind rombuszok, ezért az $A_1B_1, O_A A_2, A_3B_2$ és B_3O_B szakaszok párhuzamosak egymással. Így az $A_1B_1O_B B_3$ négyszög is paralelogramma, tehát A_1B_3 a vele szemkötti B_1O_B szakasszal együtt r hosszúságú.

Megjegyzés: Az előző feladat kijelentésében szereplő szerkesztési eljárást **Zig-zag szerkesztésnek** nevezzük.

1.2. Feladat. Adott a k_A r sugarú kör és a k_A középpontján át nem menő e_B egyenes. Továbbá adott az A_1 pont a k_A -n, és B_1 az e_B -n úgy, hogy az A_1B_1 szakasz éppen r hosszúságú. Szerkesszünk meg az $A_1, B_1, A_2, B_2, \dots$ egyenlő oldalú poligont a Zig-zag eljárás szerint, majd igazoljuk, hogy $A_5 = A_1$!



2. ábra. Az 1.2 feladat megoldása

Megoldás: A 2. ábrán a k_A kör középpontját O_A -val jelöltük és a feltüntetett szakaszok mind r hosszúságúak. Az A_1B_1 , O_AA_2 , A_3B_2 szakaszok párhuzamosak és egyenlőek, mert az $A_1B_1A_2O_A$ és az $A_2O_AA_3B_2$ négyszögek rombuszok. Ebből következik, hogy az $A_1B_1B_2A_3$ négyszög paralelogramma és így A_1A_3 párhuzamos az e_B egyenessel. Az előző gondolatmenethez hasonlóan az indexeket kettővel megnövelve arra következtetünk, hogy A_3A_5 is párhuzamos az e_B egyenessel, azaz A_5 egybeesik A_1 -gyel.

A bemutatott két feladat mögött az alábbi általános tétel húzódik meg:

1.1. Tétel (Cikk-cakk tétel). Legyen k_A és k_B egy-egy kör vagy egyenes a térben. Adott a ρ távolság úgy, hogy a két alakzat egyikén sincs olyan pont, amelytől a másik alakzat minden pontja ρ távolságra lenne. Ha valamely A_1B_1 ρ hosszúságú szakaszból kiindulva a Zig-zag szerkesztés n periódusú, azaz $A_{n+1} = A_1$ és $B_{n+1} = B_1$, akkor bármely ρ hosszú szakaszból indulva n periódusú.

Megjegyzés: A tételben szereplő alakzatok pontjaira vonatkozó feltétel azért szükséges, hogy tetszőleges A_1B_1 ($A_1 \in k_A, B_1 \in k_B$) ρ hosszúságú szakaszból kiindulva az Zig-zag szerkesztés egyértelmű legyen.

Érdekességként megemlítjük a tétel felfedezéséhez vezető út nem föltétlen egymásra épülő szakaszait. 1879-ben Darboux síkbeli, négyszög alakú rúdszerkezeteket vizsgált. Képzeljük úgy, hogy a négyszög oldalai rudak, a csúcsok pedig csuklók. Tehát a csúcsoknál a két rögzített hosszú csatlakozó oldal elfordulhat egymáshoz képest. Darboux-t a rúdszerkezetek lehetséges mozgásai érdekelték, és néhány egyenletet felírva a Jacobi-féle elliptikus függvényekre vonatkozó azonosságokra emlékeztető összefüggéseket talált.

1916-ban Fricke, felelevenítve Lagrange észrevételeit az elliptikus függvények és a gömbi geometria kapcsolatáról, bebizonyítja a Cikk-cakk tételt két gömbi főkör között cikázó poligonra. 1965-ben Bottema két, egy síkban elhelyezkedő körre mondja ki a Cikk-cakk tételt és a bizonyítást Poncelete-tételére vezeti vissza. 1971-ben az MIT munkatársai golyócsapágyakkal kapcsolatos számításokat végeznek számítógéppel, és közben felfedezik a Cikk-cakk tétel térbeli változatát, melyet nem sokkal később analízisbeli technikával be is bizonyítottak.

Sajnos a tétel csak egzisztencia jellegű! Nem tudunk meg semmit a körök elhelyezkedéséről.

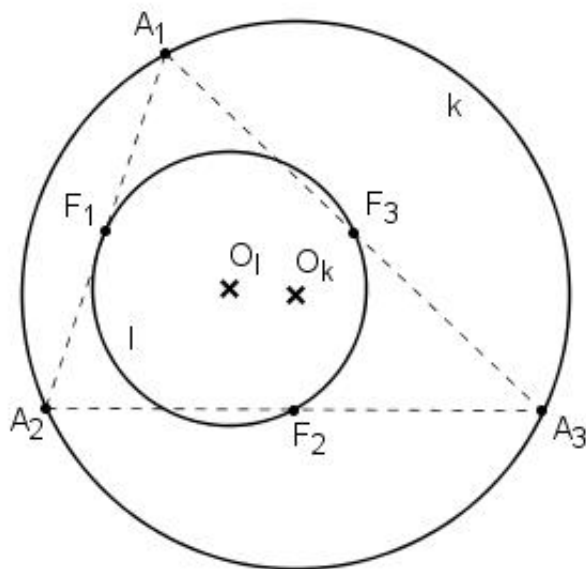
A továbbiakban csak azt az esetet vizsgáljuk, amikor k és l körök közös síkban fekszenek. Ekkor legyen r és R a k illetve l sugara, d a két kör középpontjának távolsága, és ρ a cakk hossza. Ezekhez a paraméterekhez tartozó cikk-cakk konfigurációt jelöljük $z(r, R, d, \rho)$ -val. Elvárható lenne, hogy az n lépésben záródásnak legyen egy algebrai megfelelője, egy z_n négyváltozós függvény, jobb esetben polinom úgy, hogy

$$z_n(r, R, d, \rho) = 0 \iff z(r, R, d, \rho) \text{ egy cikk-cakk konfiguráció}$$

Ha az egyik alakzat – például l – egyenes, akkor csak a k kör r sugara, középpontjának l -től való Δ távolsága és a ρ hosszúság szükséges a rendszer meghatározásához, amit jelöljük $z'(r, \Delta, \rho)$ -val, így a záródást jelentő z'_n függvények háromváltozósak. A z_n és z'_n függvények megtalálásához, amelyekről kiderült, hogy tényleg polinomok, azonban hosszú út vezetett.

1.2. A Ponzag szerkesztés

1.3. Feladat. Adottak a síkban a k, l körök. Szerkesszünk háromszöget, melynek csúcsai k -n, oldalfelezői pedig l -en vannak.



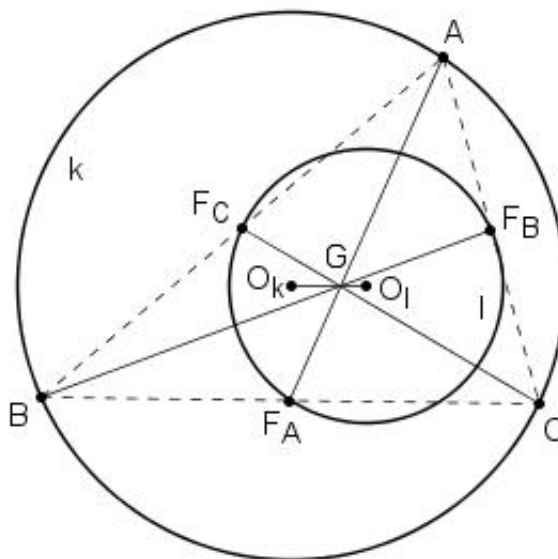
3. ábra. Az 1.3 feladat

A fenti feladat mélyén szintén egy végtelen szerkesztési eljárás lapul, melyet **Ponzag szerkesztés**nek (PONcelet + zig-ZAG) nevezünk. Az eljárás lényege, hogy a k kör és az l kör vagy egyenes esetén a k kör olyan A_1A_2 húrból indul ki, amelynek F_1 felezőpontja illeszkedik l -re. Az A_n sorozatot a következő eljárást ismételve kapjuk meg: A_n legyen az l kör A_{n-1} -ből kétszeresére nagyított képének és k -nak az A_{n-2} ponttól különböző metszéspontja; illetve $A_n = A_{n-2}$, ha nincs ilyen másik metszéspont. Az $A_{n-2}A_{n-1}$ szakasz F_{n-2} felezőpontja illeszkedik l -re, így az említett nagyított kép és k egyik metszéspontja az A_{n-2} pont lesz. Így nem fordulhat elő, hogy nincs metszéspont, azaz, hogy a szerkesztés elakad. Az eljárás akkor lesz biztosan egyértelmű, ha l nagyított képe nem eshet egybe k -val, azaz ha l nem a k középpontján áthaladó, fele akkora sugarú kör, mint k .

Kérdés, hogy mely A_1 pontból kiindulva lesz a szerkesztési folyamat 3 lépéses periodikus.

A 4. ábrán az ABC háromszög oldalainak F_A, F_B, F_C felezőpontjai egy, az ABC -hez hasonló háromszöget határoznak meg, ahol a hasonlósági arány $1/2$, a hasonlósági középpont a háromszögek közös G súlypontja. A G -re való $(-1/2)$ arányú kicsinyítés az ABC háromszöget az $F_A F_B F_C$ -re, k -t l -re, az O_k középpontot az O_l középpontba képezi le. Tehát egy már biztos: A kért háromszög csak akkor szerkeszthető, ha l éppen fele akkora sugarú, mint k . Ilyenkor viszont a k kör bármely olyan AB húrja, amelynek F_C felezőpontja illeszkedik l -re, része egy megfelelő háromszögnek. Az l és k körök ismeretében ugyanis megszerkeszthető a G pont, mint az $O_l O_k$ szakasz O_l felőli harmadolópontja. A G -re való (-2) -szeres nagyítás l -et k -ra képezi. Legyen ennél a nagyításnál F_C képe a C pont. A G pont az ABC háromszög súlypontja és a CF_C harmadolópontja. Ha most k -t

$(-1/2)$ arányban kicsinyítjük a G ponton át, akkor az l körhöz, az A, B pontokból az l -re illeszkedő F_A, F_B oldalfelezőpontokhoz jutunk.



4. ábra. Az 1.3 feladat megoldása

A feladat eredményét általánosítja a következő tétel:

1.2. Tétel (Ponzag tétel). *Adott a k kör és az l kör (vagy egyenes) úgy, hogy l ne menjen át a k középpontján. Ha a Ponzag szerkesztés n lépésben periodikus a k egy olyan húrvájából kiindulva, amelynek felezőpontja az l -en van, akkor bármely ilyen tulajdonságú húrból kiindulva is az.*

Megjegyzés: A XIX. században így mondták volna ki: Ha van egy olyan n -szög, amelynek csúcsai a k körön, oldalfelezőpontjai pedig az l körön (vagy egyenesen) vannak, akkor végtelen sok ilyen tulajdonságú n -szög van.

Megjegyzés: Az általunk vizsgált $n = 3$ eset a Feuerbach körről¹ szól.

A Cikk-cakk tétel eredményeihez hasonlóan algebrizáljuk a kapottakat. Egy két körből álló Ponzag konfiguráció megadásához csak a k és az l kör R illetve r sugarára, valamint a körök középpontjainak d távolságára van szükség. Jelöljük tehát a Ponzag konfigurációt $pz_3(r, R, d)$ -vel. Ekkor a – feladat megoldása során kapott – záródást garantáló pz_3 háromváltozós polinom

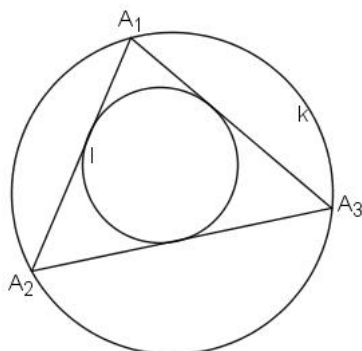
$$pz_3(r, R, d) = r - 2R$$

alakban írható. A kapott összefüggésből látható, hogy a körök középpontjainak távolsága nem játszik szerepet $n = 3$ esetén.

¹ A háromszög oldalainak felezőpontjai, magasságainak talppontjai és a magasságpontot a csúcsokkal összekötő szakaszok felezőpontjai a Feuerbach körön vannak. E kör középpontja felezi a magasságpontot a háromszög köré írt kör középpontját összekötő szakaszt, sugara a háromszög köré írt kör sugarának a fele.

1.3. A Poncelet szerkesztés

1.4. Feladat. Adottak a síkban a k, l körök. Szerkesszünk háromszöget, majd négyszöget, amelynek csúcsai k -n vannak, oldalegyenesei pedig érintik l -et.



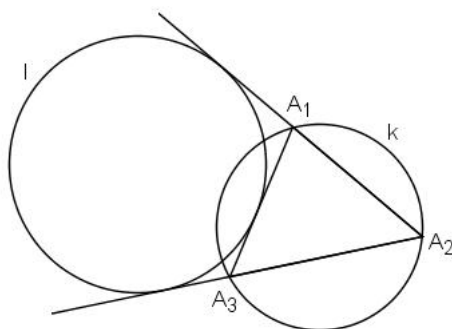
5. ábra. Az 1.4 feladat

A feladatban kért szerkesztési eljárás elég egyszerű. Ha kiindulunk a k kör l -et érintő A_1A_2 húrjából, akkor A_2 -ből csak meg kell húznunk az l kör A_1A_2 -től különböző érintőjét. Az érintő és a k kör A_2 -től különböző metszéspontja lesz az A_3 pont. A következő lépésben A_3 -ból húzunk érintőt l -hez és így tovább. Ezt azt eljárást **Poncelet szerkesztésnek** nevezzük.

A fenti feladat azt kérdezi, hogy mely A_1A_2 húr-érintőtől indulva lesz a folyamat 3, illetve 4 lépésben periodikus. Hasonló eredményhez vezető feladattal már Euler is foglalkozott, hiszen egy neki tulajdonított tétel szerint a háromszög szerkeszthetőségének feltétele

$$R^2 - d^2 = 2Rr,$$

ahol R és r a háromszög körülírt illetve beírt körének sugarai és d a két kör középpontjának távolsága.



6. ábra. Háromszög hozzáírt és körülírt köre

A mi esetünkben nem biztos, hogy a két kör egymásban van, ugyanis - mint ahogy a 6. ábrán látható - l lehet a keresett háromszög hozzáírt köre is. Ekkor a fenti összefüggés kissé módosítva, így néz ki:

$$|R^2 - d^2| = 2Rr.$$

A húrérítő négyszögre vonatkozó analóg, de kissé bonyolultabb összefüggést Euler tanítványa, Fuss találta meg 1797-ben:

$$2r^2(R^2 + d^2) = (R^2 - d^2)^2$$

A probléma nagyobb n -ekre rohamosan nehezedik. Öt-, hat-, hét-, és nyolcszögek esetén Fuss már csak azt a speciális esetet vizsgálta, amikor a sokszög szimmetrikus a körök centrálisára.

A nagy változást Poncelet 1817-ben megjelent tétele hozta. Ez a tétel az eddigi jelöléseket követve a következőképpen fogalmazható meg.

1.3. Tétel. *Legyenek k és l egymást nem érintő, nemelfajuló kúpszeletek. Ha van olyan húr-érítő, amelyből indulva a Poncelet-szerkesztés n periódusú, akkor bármely húr-érítőből indulva n periódusú.*

Megjegyzés: Poncelet tovább általánosította a tételt $\alpha k + \beta l$ kúpszeletsorokra is kiterjesztette. A fenti tétel az általános tétel egy speciális esete.

Az előző két szerkesztési eljáráshoz hasonlóan itt is keressük a k és l paramétereit tartalmazó algebrai relációt, mely esetén a k és l kúpszeletek n periódusú konfigurációt alkotnak (P_n).

Az elmúlt két évszázadban több matematikus is foglalkozott a fenti kérdéssel. Fuss 1797-ben, Steiner 1827-ben, Richelot 1830-ban, Jacobi 1881-ben, Chaundy 1923-ban és Kerawala 1947-ben találtak összefüggéseket. Ezek azonban már elég kicsi n -ek esetén ($n \geq 5$) meglehetősen bonyolultak.

1828-ban Jacobi az elliptikus integrálokkal hozta kapcsolatba a Poncelet-tételt, majd 1853-ban Cayley ismerve Fuss, Steiner, Poncelet és Jacobi eredményeit, utóbbi módszerét követve, megtalálta a képleteket. Eredményeit a következő tétel foglalja össze:

1.4. Tétel (Cayley tétele). *Jellemezzük a k és l kúpszeletet a K illetve a L mátrixokkal, majd képezzük a $t \cdot K + L$ mátrixot. E mátrix determinánsának négyzetgyökét a t változó szerint sorbafejtve a következőt kapjuk:*

$$\sqrt{t \cdot K + L} = A_0 + A_1 \cdot t + A_2 \cdot t^2 + \dots$$

A Poncelet szerkesztés pontosan akkor n periódusú, ha

$$\begin{vmatrix} A_2 & A_3 & \dots & A_m & A_{m+1} \\ A_3 & A_4 & \dots & A_{m+1} & A_{m+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ A_m & A_{m+1} & \dots & A_{2m-2} & A_{2m-1} \\ A_{m+1} & A_{m+2} & \dots & A_{2m-1} & A_{2m} \end{vmatrix} = 0, \text{ amikor } n = 2m + 1$$

$$\begin{vmatrix} A_3 & A_4 & \dots & A_m & A_{m+1} \\ A_4 & A_5 & \dots & A_{m+1} & A_{m+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ A_m & A_{m+1} & \dots & A_{2m-3} & A_{2m-2} \\ A_{m+1} & A_{m+2} & \dots & A_{2m-2} & A_{2m-1} \end{vmatrix} = 0, \text{ amikor } n = 2m$$

1.5. Tétel. Adottak a k és l körök az

$$x^2 + y^2 = R^2 \quad \text{és az} \quad (x - d)^2 + y^2 = r^2$$

egyenleteik által. Az egyenleteknek megfelelő K illetve L mátrixokból képzett $t \cdot K + L$ mátrix determinánusa:

$$(1 + t)[r^2 + (R^2 + r^2 - d^2)t + R^2t^2].$$

Bizonyítás:

$$\begin{aligned} t \cdot K + L &= tR^2 - tx^2 - ty^2 + r^2 - x^2 + 2xd - d^2 - y^2 = \\ &= (-t - 1)x^2 + (-t - 1)y^2 + 2dx + (tR^2 + r^2 - d^2) = \\ &= \begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -t - 1 & 0 & d \\ 0 & -t - 1 & 0 \\ d & 0 & tR^2 + r^2 - d^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \det(t \cdot K + L) &= \det \begin{pmatrix} -t - 1 & 0 & d \\ 0 & -t - 1 & 0 \\ d & 0 & tR^2 + r^2 - d^2 \end{pmatrix} = \\ &= (-t - 1)(-t - 1)(tR^2 + r^2 - d^2) - d^2(-t - 1) = \\ &= (1 + t)[(1 + t)(tR^2 + r^2 - d^2) + d^2] = \\ &= (1 + t)[tR^2 + r^2 - d^2 + t^2R^2 + tr^2 - td^2 + d^2] = \\ &= (1 + t)[r^2 + (R^2 + r^2 - d^2)t + R^2t^2]. \blacksquare \end{aligned}$$

Az 1.4 tétel alapján a kapott kifejezés négyzetgyökét t szerint sorbafejtve kapjuk, hogy:

$$\begin{aligned} &\sqrt{(1 + t)[r^2 + (R^2 + r^2 - d^2)t + R^2t^2]} = \\ &= A + Bt + Ct^2 + Dt^3 + Et^4 + Ft^5 + Gt^6 + Ht^7 + \dots \end{aligned}$$

Innen a különböző együtthatókból képzett determinánsok értékei megadják a kívánt összefüggéseket a k és l körök R és r sugarai valamint a középpontjaik d távolsága között.

Például $n = 3, 5, 7$ stb. esetén:

$$|C| = 0, \quad \begin{vmatrix} C & D \\ D & E \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} C & D & E \\ D & E & F \\ E & F & G \end{vmatrix} = 0, \quad \dots$$

$n = 4, 6, 8$ stb. esetén pedig:

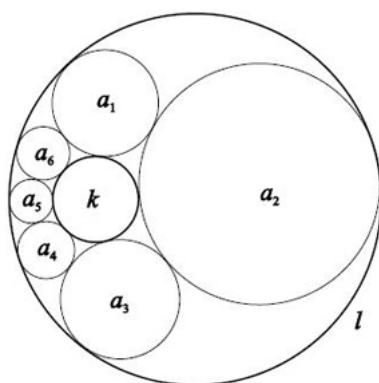
$$|D| = 0, \quad \begin{vmatrix} D & E \\ E & F \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} D & E & F \\ E & F & G \\ F & G & H \end{vmatrix} = 0, \quad \dots$$

Ezen feltételek teljesülése mellett végtelen sok olyan n -szög írható a k körbe, melyek oldalai egyidejűleg az l kört érintik. A meglehetősen bonyolult összefüggések kifejtett alakban a függelékben olvashatók.

Voltak azonban olyanok, akik közelítő megoldásokat kerestek: Weill 1878-ben talált egy algoritmust, amely közelítő megoldást ad páros n -ek esetén. Mi a MATLABban írt programunk segítségével tetszőleges n esetre mutatunk megoldásokat.

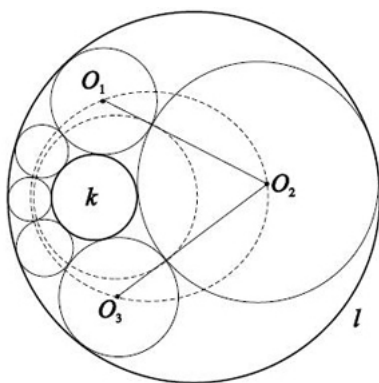
Mielőtt rátérnénk a Poncelet-tétel bizonyítására nézzük meg két igen érdekes és nemcsak matematikai, hanem esztétikai értelemben is szép, talán meglepő következményét a tételnek.

1.1. Következmény (Steiner porizmája). *Ha két koncentrikus kör úgy helyezkedik el, hogy az egyik a másik belsejébe esik, és ezután olyan köröket rajzolunk, amelyek sorjában egymást is és az eredeti két kört is érintik, akkor megtörténhet az az eset, hogy az érintő körök sorozata bezárul; n körből álló gyűrűt kapunk, amelyben az utolsó érinti az elsőt. Ebben az esetben a gyűrű első körének minden olyan kört kiválaszthatunk, amely érinti az eredeti két kört.*



7. ábra. Steiner porizmája

1.2. Következmény. *Az 1.1 következmény konfigurációjában a gyűrűt alkotó körök középpontjai ellipszist alkotnak. Sőt, a gyűrűt alkotó, páronként egymást érintő körök középpontjait összekötő szakaszok egy kört érintenek.*



8. ábra. Steiner porizmája és Poncelet tétele

2. A Poncelet tétel

2.1. A Poncelet-tétel születése

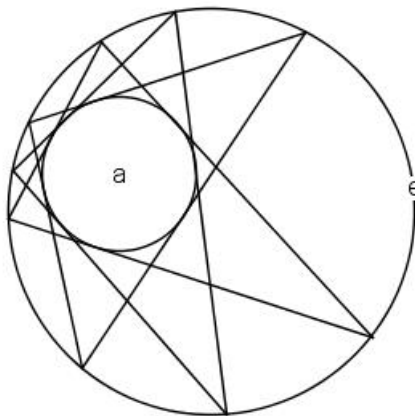
Jean-Victor Poncelet 1788. január 7-én született a franciaországi Metzben. Egyetemi tanulmányai alatt Monge tanítványa volt, majd francia hadmérnök-tábornokként, Napóleon oroszországi hadseregében szolgált. 1812 telén a „nagy armada” veresége után orosz fogságba esett. A rabságban felelevenítette magában az egyetemi tanulmányait, olvasmányait, Monge geometriai módszereit vizsgálta. Szellemi közegtől elzártan a geometria új területeit fedezte fel. Megalkotta az ideális pontok illetve a projektív transzformáció fogalmát, és elméjében furcsa körtáncra indultak a poligonok. 1814 szeptemberében szabadult és visszatért Franciaországba. A fogságban fogant gondolatai 1822-ben jelentek meg „Értekezés az alakzatok projektív tulajdonságairól” címmel. Ebben a művében jelent meg a következő tétel:

2.1. Tétel (Poncelet tétele). *Adottak az egymást nem érintő e és a körök, a az e belsejében. Az e körön tetszőlegesen választott A_0 pontból indulva megszerkeszthetjük az e kör A_1, A_2, A_3, \dots pontjait úgy, hogy $A_0A_1, A_1A_2, A_2A_3 \dots$ egyenesek érintsék az a kört és bármely két, a sorban egymást követő egyenes különbözők egymástól. Előfordulhat, hogy bizonyos számú lépésben visszajutunk a kezdőpontba, azaz $A_n = A_0$. Ekkor az e kör bármely másik pontjából indulunk is ki, biztosan visszatérünk a kezdőpontba, mégpedig ugyanannyi lépésben, mint előzőleg (n).*

Megjegyzés: A tétel tehát nem azt mondja ki, hogy mindig visszajutunk, hanem azt, hogy a visszatérés nem a kezdőpont és a lépésszám megválasztásától, hanem a két kör nagyságától, egymáshoz viszonyított helyzetétől függ.

Megjegyzés: Koncentrikus körök esetén a tétel állítása triviálisan teljesül. Minden más esetben meglehetősen nehéz a bizonyítás.

Emlékezzünk most újra az 1.4 feladatra. Poncelet előbbi tétele alapján mondhatjuk, hogy ha az 1.4 feladat adataira teljesül Euler $R^2 - d^2 = 2Rr$ összefüggése, akkor végtelen sok megoldás van, ha nem teljesül, akkor nem létezik ilyen háromszög.

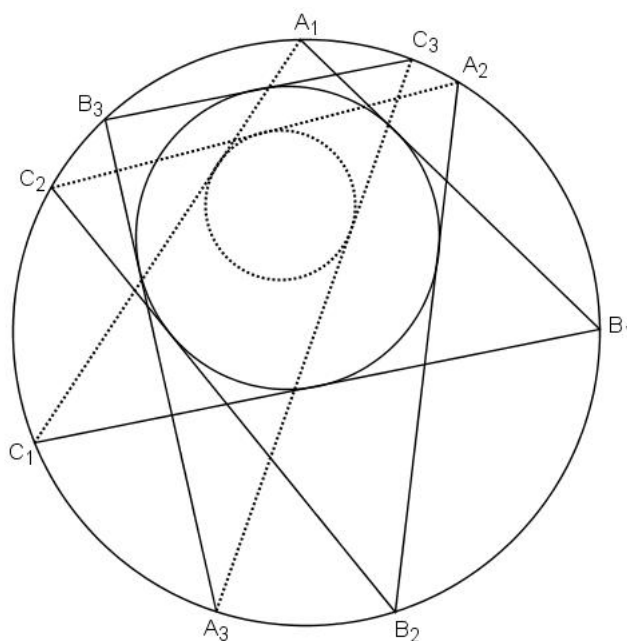


9. ábra. Poncelet tétele $n = 3$ esetén

A helyzet ahhoz hasonló, mint amikor három szögből akarunk háromszöget szerkeszteni. Csak akkor van megoldás, ha a szögek összege 180° , ekkor viszont végtelen sok megoldás van, sőt a háromszög egyik oldala tetszőlegesen kiválasztható. Ehhez hasonlóan itt, ha az e , a körök R , r sugarai és középpontjaik d távolsága kielégíti az Euler-összefüggést, akkor az e kör bármely pontja választható egy e -be és a köré írt háromszög csúcsának.

Poncelet viszont azt is vizsgálta, hogy milyen adatokra nem teljesül az Euler-összefüggés, és igen érdekes eredményre jutott. Kiderült ugyanis, hogy a szerkesztendő háromszögek nagyon szabályos módon nem léteznek. Ilyen megvilágításban az Euler-tétel nem egyszerűen csak a háromszögről és annak két nevezetes köréről, hanem egy körsor elemei között kígyózó poligon záródásáról is szól.

A 10. ábrán rossz adatokból próbáltunk háromszöget szerkeszteni. Az e és a köröket a rossz adatoknak megfelelően vettük fel. Ezt követően felvettünk az e körön próbaként egy A pontot, majd ebből érintőt húztunk az a körhöz, mely az e körből kimetszette a B pontot. A Poncelet szerkesztési eljárásnak megfelelően a B -ből ismét érintőt húztunk a -hoz és kaptuk C -t. A CA egyenes láthatóan nem érinti már az a kört. Ez természetesen várható is volt. Az viszont már meglepő, hogy újabb e -n levő pontokból kiindulva, az eljárást többször megismételve, az a -t nem érintő C_iA_i szakaszok mindegyike egy másik kört érint: c -t. Ráadásul a c kör az a és e körök körsorához² tartozik. Ezt Poncelet is észrevette és bizonyította is.



10. ábra. „Rossz” adatokból szerkesztett háromszögek

² A körsorokról részletesebb leírás a függelékben olvasható

2.2. A Poncelet-tétel elemi bizonyítása

A tétel különböző nézőpontokból való részletes elemzése után elérkezett az idő, hogy be is bizonyítsuk. Előbb azonban lássunk néhány, a tétel bizonyításának tárgyalását egyszerűbbé tevő, segédtételt és azok bizonyítását.

2.1. Lemma. *Ha A és B rögzített pontok a síkban, akkor azon M pontok mértani helye, amelyekre $\alpha MA^2 + \beta MB^2 = c$ (állandó), a következő:*

- a) ha $\alpha + \beta = 0$, akkor egy egyenes, mely merőleges AB -re;
- b) Ha $\alpha + \beta \neq 0$, akkor
 - i) üres halmaz, vagy
 - ii) egy pont, vagy
 - iii) egy olyan kör, melynek középpontja az AB egyenesen van.

Bizonyítás:

- a) $\alpha + \beta = 0 \Rightarrow \beta = -\alpha \Rightarrow MA^2 - MB^2 = \frac{c}{\alpha}$. Legyen M_0 az M pont AB -re eső vetülete, ekkor $MA^2 = MM_0^2 + M_0A^2$ és $MB^2 = MM_0^2 + M_0B^2$ és így

$$\frac{c}{\alpha} = MA^2 - MB^2 = M_0A^2 - M_0B^2 = (M_0A - M_0B)(M_0A + M_0B).$$

Következik, hogy az M_0 pont – az M vetülete – rögzített, így az M az M_0 -ban az AB -re emelt merőlegesen van. Mivel minden ilyen pont teljesíti a feltételt, a keresett mértani hely az egész egyenes.

- b) Ha $\alpha, \beta > 0$, akkor az (AB) -n felvesszük azt a C pontot, amelyre $\frac{CA}{CB} = \frac{\beta}{\alpha}$, ekkor $CA = \frac{\beta}{\alpha+\beta}AB$ és $CB = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}AB$.

Az MAB háromszögben az MC egyenesre alkalmazzuk a Stewart tételt:

$$MA^2 \cdot CB + MB^2 \cdot CA - MC^2 \cdot AB = CB \cdot CA \cdot AB,$$

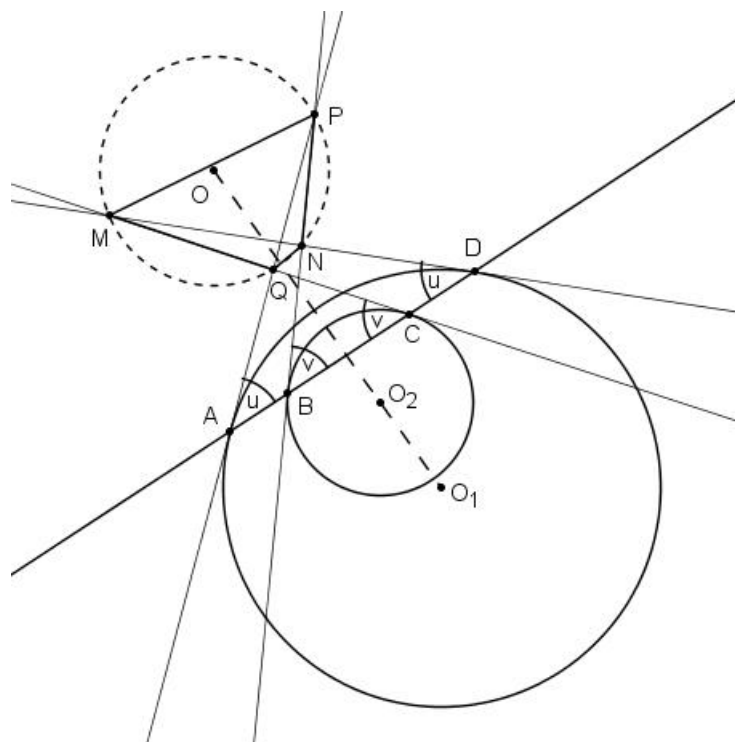
vagyis

$$\begin{aligned} \frac{\alpha MA^2 + \beta MB^2}{\alpha + \beta} - MC^2 &= \frac{\alpha\beta}{(\alpha + \beta)^2} \cdot AB^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow MC^2 &= \frac{c}{\alpha + \beta} - \frac{\alpha\beta}{(\alpha + \beta)^2} \cdot AB^2 =: x. \end{aligned}$$

Ha $x > 0$, akkor M egy C középpontú, \sqrt{x} sugarú kört ír le; ha $x = 0$, a mértani hely a C pont; ha pedig $x < 0$ a mértani hely üres halmaz. ■

Megjegyzés: Ha $\alpha < 0$, a B és M szerepét felcseréljük.

2.2. Lemma. *Legyen $\mathcal{C}(O_1, R_1)$ és $\mathcal{C}(O_2, R_2)$ két tetszőleges kör és d egy egyenes, mely metszi e köröket az A, D illetve B, C pontokban. Ha X az A, B, C, D pontok valamelyike, jelöljük e_X -szel az X pontban ahhoz a körhöz húzott érintőt, amelyen X rajta van. Ha $e_C \cap e_D = \{M\}$, $e_C \cap e_A = \{N\}$, $e_B \cap e_A = \{P\}$ és $e_D \cap e_B = \{Q\}$, akkor az $MNPQ$ négyszög köré írható kör középpontja, az O_1 és O_2 pontok kollineárisak.*



11. ábra. A 2.2 lemma

Bizonyítás: A PO_2B és PO_1A derékszögű háromszögekből

$$PO_2^2 = PB^2 + R_2^2, \quad PO_1^2 = PA^2 + R_1^2 \quad (1)$$

A PAB háromszögben a szinusz-tételt alkalmazva kapjuk, hogy

$$\frac{PA}{PB} = \frac{\sin(180^\circ - v)}{\sin u} = \frac{\sin v}{\sin u} = \alpha \Rightarrow PA^2 = \alpha^2 PB^2,$$

tehát az (1) szerint

$$PO_1^2 - \alpha^2 PO_2^2 = R_1^2 - \alpha^2 R_2^2.$$

Hasonlóan, $MO_2^2 = MC^2 + R_2^2$, $MO_1^2 = MD^2 + R_1^2$,

$$\frac{MD}{MC} = \frac{\sin(180^\circ - v)}{\sin u} = \frac{\sin v}{\sin u} = \alpha \Rightarrow MD^2 = \alpha^2 MC^2,$$

így

$$MO_1^2 - \alpha^2 MO_2^2 = R_1^2 - \alpha^2 R_2^2.$$

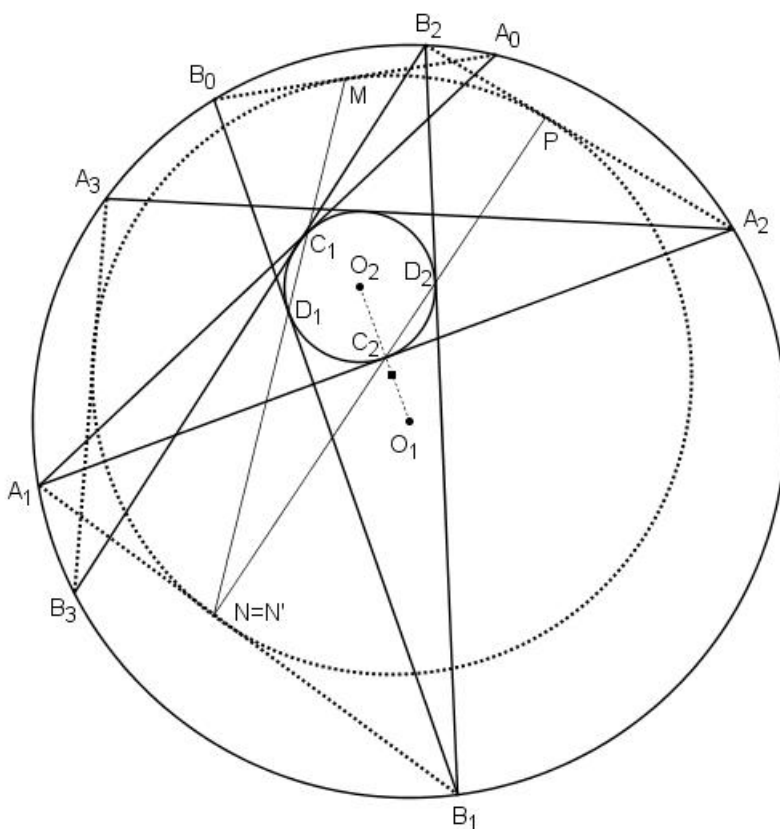
Ugyanílyen megfontolások alapján

$$NO_1^2 - \alpha^2 NO_2^2 = QO_1^2 - \alpha^2 QO_2^2 = PO_1^2 - \alpha^2 PO_2^2 = MO_1^2 - \alpha^2 MO_2^2 = R_1^2 - \alpha^2 R_2^2,$$

így a 2.1 lemma alapján az M, N, P, Q pontok egy olyan körön helyezkednek el, amelynek középpontja az O_1O_2 egyenesen van. ■

Megjegyzés: A bizonyításból kitűnik, hogy a tulajdonság egy módosított változata is igaz: Ha az $MNPQ$ négyszög a $\mathcal{C}(O_3, R_3)$ körbe írható és a d egyenes az A, B, C illetve D pontokban metszi az NP, PQ, MN és MQ egyeneseket, akkor az O_3 pont rajta van az MQ és NP -t a D illetve A -ban és az MN illetve PQ -t a C és B -ben érintő két kör középpontja által meghatározott egyenesen.

2.3. Lemma. Legyen a $\mathcal{C}(O_2, R_2)$ kör a $\mathcal{C}(O_1, R_1)$ kör belsejében. Az $A_0 \in \mathcal{C}(O_1, R_1)$ pontból kiindulva megszerkesztjük az A_0, \dots, A_n, \dots pontsorozatot úgy, hogy $A_k A_{k+1}$ érinti a $\mathcal{C}(O_2, R_2)$ kört és $A_k \in \mathcal{C}(O_1, R_1) \forall k \in \mathbb{N}$. Hasonlóan megszerkesztjük a B_0, \dots, B_n, \dots sorozatot is. Igazoljuk, hogy létezik egy olyan kör, amelynek középpontja az $O_1 O_2$ egyenesen van és amely érinti az összes $A_k B_k$ egyenest.



12. ábra. A 2.3 lemma

Bizonyítás: A 12. ábra szerint jelöljük C_1, C_2, D_1, D_2 -vel az érintési pontokat, valamint legyenek

$$C_1 D_1 \cap A_0 B_0 = \{M\}, \quad C_1 D_1 \cap A_1 B_1 = \{N\},$$

$$C_2 D_2 \cap A_1 B_1 = \{N'\}, \quad C_2 D_2 \cap A_2 B_2 = \{P\}.$$

Tekintsük azt a $\mathcal{C}(O_3, R_3)$ kört, amely $A_0 B_0$ -t M -ben, $A_1 B_1$ -t pedig N -ben érinti.

A 2.2 lemmát alkalmazva a $\mathcal{C}(O_3, R_3)$, $\mathcal{C}(O_2, R_2)$ körökre és az $M - D_1 - C_1 - N$ egyenesre kapjuk, hogy $O_3 \in O_1 O_2$. Hasonlóan, az $A_1 B_1$ -t N' -ben és az $A_2 B_2$ -t P -ben érintő $\mathcal{C}(O_4, R_4)$ kör O_4 középpontja is az $O_1 O_2$ egyenesen van. (*)

$$\left. \begin{array}{l} B_1ND_{1\Delta}\text{-ben: } \frac{B_1N}{\sin u} = \frac{B_1D_1}{\sin v} \\ A_1NC_{1\Delta}\text{-ben: } \frac{NA_1}{A_1C_1} = \frac{\sin u}{\sin(180^\circ-v)} = \frac{\sin u}{\sin v} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{B_1N}{NA_1} = \frac{B_1D_1}{A_1C_1}. \quad (1)$$

Hasonló megfontolások miatt

$$\frac{N'A_1}{N'B_1} = \frac{A_1C_2}{B_1D_2}. \quad (2)$$

De

$$\left. \begin{array}{l} B_1D_1 \equiv B_1D_2 \\ A_1C_1 \equiv A_1C_2 \end{array} \right\} \xrightarrow{(1),(2)} \frac{B_1N}{NA_1} = \frac{B_1N'}{N'A_1} \Rightarrow N = N',$$

tehát a $\mathcal{C}(O_3, R_3)$ és $\mathcal{C}(O_4, R_4)$ körök N -ben érintik az A_1B_1 egyenest, és így középpontjuk az N -ben az A_1B_1 -re emelt merőlegesen van. A (*) szerint mindkét középpont az O_1O_2 egyenesen is rajta van, tehát mindkét középpont közös pontja két nem egybeeső egyenesnek, és így a két középpont egybeesik. Mivel az N közös pontja a két körnek és a körök középpontjai egybeesnek, ezért a két kör teljes egészében egybeesik, vagyis az a kör, amely A_0B_0 -t M -ben és az A_1B_1 -t N -ben érinti, érinti az A_2B_2 -t is.

Az előbbi gondolatmenetet megismételve az A_1B_1 , A_2B_2 és A_3B_3 egyenesekre kapjuk, hogy $\mathcal{C}(O_3, R_3)$ érinti A_3B_3 -t is; indukcióval az is belátható, hogy $\mathcal{C}(O_3, R_3)$ az összes A_kB_k egyenest is érinti. ■

2.2. Tétel (Poncelet-tétel). *Az előbbi tulajdonság jelöléseit használva, ha az A_0, \dots, A_n, \dots sorozat periodikus, azaz valamilyen $k \neq 0$ -ra $A_0 = A_k$, akkor tetszőleges $B_0 \in \mathcal{C}(O_1, R_1)$ pontból kiindulva a B_0, \dots, B_n, \dots sorozat is periodikus, és $B_k = B_0$.*

Bizonyítás: Tekintsük a 2.3 lemmában megszerkesztett $\mathcal{C}(O_3, R_3)$ kört, amely érinti az összes A_nB_n egyenest. A_0B_0 és A_kB_k is érinti a $\mathcal{C}(O_3, R_3)$ kört, és mivel $A_k = A_0$, az A_0B_0 és A_0B_k is érinti a $\mathcal{C}(O_3, R_3)$ kört. Tételezzük fel, hogy $B_0 \in (A_0A_1)$ a kisebb köríven van. Ekkor B_1 az (A_1A_2) körívhez tartozik és általában B_k az (A_kA_{k+1}) -hez, és így (mivel $A_k = A_0$ és $A_{k+1} = A_1$) a B_k pont is az (A_0A_1) köríven van. Az A_0A_1 viszont metszi a $\mathcal{C}(O_3, R_3)$ kört és egy szelő egyik oldalán egy adott pontból nem húzható két érintő egy körhöz, tehát $B_0 = B_k$. ■

2.3. Poncelet általános tétele

Most kijelentjük a tételt általánosabb esetben, és az előbbi nehézkes elemi bizonyítás után adunk egy újabb, igen érdekes bizonyítást.

2.3. Tétel (Poncelet általános tétele). *Legyen e egy nem metsző körsor egyik köre, az a_1, a_2, \dots, a_n irányított körök pedig ugyanennek a körsornak az e belsejében található, nem feltétlenül különböző tagjai. Az e körön felvett A_0 pontból kiindulva megszerkesztjük ugyanezen a körön az A_1, A_2, \dots, A_n pontokat úgy, hogy az $A_0A_1, A_1A_2, \dots, A_{n-1}A_n$ egyenesek rendre érintsék az a_1, a_2, \dots, a_n köröket, az irányításnak³ megfelelően. Előfordulhat, hogy a szerkesztés végén éppen visszajutunk, azaz $A_n = A_0$. Ebben az esetben az e kör bármelyik pontjából is indulunk ki, az n -edik lépés után vissza fogunk jutni a kezdőpontba tetszőleges sorrendben húzva az érintőket a körökhöz.*

A bizonyítás előtt szükségünk van néhány absztrakt algebrai eszközre; előbb vezessük be ezeket.

Tekintsük az e kör pontjainak halmazán azt a leképezést, amely az $X \in e$ ponthoz hozzárendeli az X -ből az a (irányított) körhöz húzott, az irányításnak megfelelő, e -vel való második metszéspontját.

- a) Ha az a kör megegyezik e -vel, akkor ez a leképezés az *identitás*, azaz a helyben hagyás.
- b) Ha az a kör koncentrikus e -vel, de nem egyezik meg vele, akkor a vizsgált transzformáció egy egyszerű *elforgatás*.
- c) Más esetben a forgatáshoz hasonló hozzárendelést kapunk, melyet *ferde elforgatásnak* nevezünk.
- d) Két - azonos pont körüli - elforgatás *kompozíciójaként* újabb elforgatást kapunk, melynek szöge az eredeti forgási szögek összege.

A fent leírtak úgy foghatók fel, mintha az e körből és a körsor e belsejében fekvő irányított köreiből álló \mathbb{P} halmazon lenne egy \otimes művelet, melyre:

$$(a \otimes b) \otimes c' = e$$

azaz

$$a \otimes b = (c')^{-1}$$

Poncelet természetesen szót sem ejtett ilyen absztrakt algebrai fogalmakról, de lényegében megmutatta, hogy a \otimes művelet asszociatív és kommutatív. Tehát a \mathbb{P} halmaz a \otimes műveletre nézve kommutatív, azaz Abel csoportot alkot, ahol e egységelem, és egy irányított kör inverze ugyanaz a kör ellentétes irányítással.

A fenti eszközök birtokában lehetőségünk van a fent kijelentett – a korábbiaknál jóval általánosabb – tétel egyszerű bizonyítására.

³ Mivel egy külső pontból egy körhöz két érintő húzható, a szerkesztési bonyodalmak elkerülése végett, rögzítsünk a körsor körein egymástól függetlenül egy-egy forgatási irányt.

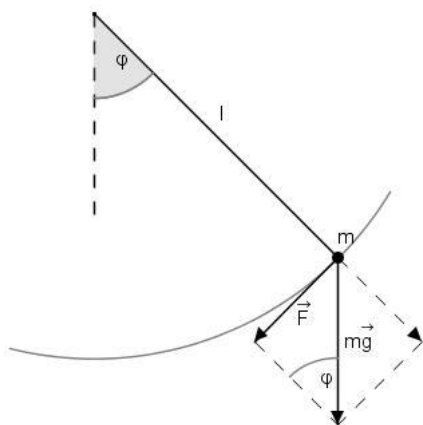
Bizonyítás: Az e körvonal a_1, a_2, \dots, a_n körökre vonatkozó ferde elforgatásainak kompozíciója a körsor

$$b = a_1 \otimes a_2 \otimes \dots \otimes a_n$$

irányított köre által meghatározott ferde elforgatással egyezik meg. Ez a transzformáció az A_0 pontot önmagába képezi, tehát a b irányított körhöz A_0 -ból húzott érintő nem metszheti az e kört, hanem azt is érinti. Ez azt jelenti, hogy $b = e$, hiszen a körsor többi elem e belsejében van és nem érinti e -t. Az e által meghatározott ferde forgatás az identitás, tehát az A_0 pont helyett bármelyik másik pontból indulunk is ki, visszajutunk hozzá. A csoport kommutativitása miatt az se számít, hogy milyen sorrendben húzzuk az érintőket a megadott körökhöz. ■

3. A matematikai inga és a Poncelet-tétel

3.1. A matematikai inga pályája



13. ábra. A matematikai inga

A matematikai inga olyan idealizált inga, amely egy l hosszúságú súlytalan fonálból és egy rá erősített m tömegű tömegpontból áll. Jelöljük a fonal függőlegessel bezár szögét φ -vel ($-\infty < \varphi < \infty$). Ekkor Newton második törvénye⁴ alapján, felhasználva, hogy

$$|F| = m \cdot |g| \cdot \sin \varphi \quad \text{és} \quad a = l \cdot \ddot{\varphi},$$

kapjuk, hogy

$$m \cdot l \cdot \ddot{\varphi} = -m \cdot g \cdot \sin \varphi;$$

vagyis az inga mozgásegyenlete:

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \sin \varphi = 0,$$

ahol φ a szögkitérést, míg $\ddot{\varphi}$ a szöggyorsulást jelöli. A fenti egyenlet Mathieu⁵-egyenletként is ismert.

A továbbiakban vizsgáljuk a matematikai inga pályáját. Az $x_1 := \varphi$ és $x_2 := \dot{\varphi}$ jelöléseket bevezetve, a fenti differenciálegyenlet átírható az

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\frac{g}{l} \sin x_1 \end{cases}$$

autonóm differenciálegyenlet-rendszerré, ahol $x_2 = \dot{\varphi}$ a szögsebességet jelöli.

Tudjuk, hogy autonóm differenciálegyenlet-rendszernek három féle pályája lehet: egy pont (egyensúlyi állapot), egyszerű zárt görbe (a megoldás periodikus) vagy egy egyenessel holomorf pálya (az egyenesnek van a pályára történő bijekciója). Ezeket az eseteket fogjuk megvizsgálni.

⁴ $F = m \cdot a$, ahol F az m gyorsítandó tömegre kifejtett erővektor és a a gyorsulásvektor

⁵ Émile Léonard Mathieu (1835. május 15., Metz – 1890. október 19., Nancy) francia matematikus

Legyen $\varphi(t_0) = \varphi_0 = 0$ a kezdeti szögkitérés, valamint $\dot{\varphi}_0$ a kezdeti szögsebesség a t_0 pillanatban. Szorozzuk be az inga $\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \sin \varphi = 0$ egyenletét $\dot{\varphi} \neq 0$ -val, ekkor azt kapjuk, hogy

$$\ddot{\varphi} \dot{\varphi} + \frac{g}{l} \dot{\varphi} \sin \varphi = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} (\dot{\varphi})^2 + \frac{g}{l} (1 - \cos \varphi) \right] = 0$$

Jelölje

$$E(\varphi, \dot{\varphi}) := \frac{1}{2} (\dot{\varphi})^2 + \frac{g}{l} (1 - \cos \varphi).$$

Ekkor az energiamegmaradás elvéből következik, hogy $E(\varphi, \dot{\varphi})$ a mozgások mentén állandó, tehát

$$\frac{1}{2} (\dot{\varphi})^2 + \frac{g}{l} (1 - \cos \varphi) = c, \quad c \in \mathbb{R}. \quad (2)$$

A) Ha $c = 0$, akkor

$$\frac{1}{2} (\dot{\varphi})^2 + \frac{g}{l} (1 - \cos \varphi) = 0$$

és mivel a bal oldalon levő összeg mindkét tagja pozitív, következik, hogy $\dot{\varphi} = 0$ és $\cos \varphi = 1$, vagyis $\varphi = 2n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$. Ebben az esetben az inga egyensúlyi helyzetben van.

B) Ha $c \neq 0$, akkor $t_0 = 0$ esetén $\varphi_0 = 0$, így az $\frac{1}{2} (\dot{\varphi}_0)^2 + \frac{g}{l} (1 - 1) = c$ egyenletből kapjuk, hogy

$$c = \frac{1}{2} (\dot{\varphi}_0)^2$$

Tételezzük fel, hogy $\dot{\varphi}_0 = 0$. Ekkor a (2) egyenlet $\frac{g}{l} (1 - \cos \varphi) = \frac{1}{2} (\dot{\varphi}_0)^2$ alakú lesz. A zárójel eltüntetése után kapjuk, hogy

$$1 - \frac{l}{2g} (\dot{\varphi}_0)^2 = \cos \varphi \quad (3)$$

a) Ha $\left| 1 - \frac{l}{2g} (\dot{\varphi}_0)^2 \right| < 1$ akkor a (3) egyenletből $\varphi = \arccos \left(1 - \frac{l}{2g} (\dot{\varphi}_0)^2 \right)$.

b) Ha $\left| 1 - \frac{l}{2g} (\dot{\varphi}_0)^2 \right| = 1$, akkor két eset lehetséges:

i) $\frac{l}{2g} (\dot{\varphi}_0)^2 = 0 \Rightarrow \dot{\varphi}_0 = 0$

Visszahelyettesítve a (3)-ba $\cos \varphi = 1$, tehát $\varphi = 2n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$

ii) $\frac{l}{2g} (\dot{\varphi}_0)^2 = 2 \Rightarrow (\dot{\varphi}_0)^2 = \frac{4g}{l} \Rightarrow \dot{\varphi}_0 = \pm 2\sqrt{\frac{g}{l}}$ (kritikus sebesség)

Visszahelyettesítve a (3)-ba $\cos \varphi = -1$, tehát $\varphi = (2n + 1)\pi$, $n \in \mathbb{Z}$

c) Ha $\left| 1 - \frac{l}{2g} (\dot{\varphi}_0)^2 \right| > 1$, akkor az inga körbe forog.

3.2. Az elsőfajú elliptikus integrál és a matematika inga periódusának kapcsolata

Ismét az inga $\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \sin \varphi = 0$ mozgásegyenletéből indulunk ki, melyet integrálva a

$$\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = 2\frac{g}{l}(\cos \varphi - \cos \varphi_0)$$

egyenlethez jutunk, ahonnan kapjuk, hogy

$$\frac{d\varphi}{dt} = \sqrt{\frac{2g}{l}} \sqrt{\cos \varphi - \cos \varphi_0}$$

innen pedig a következő összefüggés adódik:

$$\frac{d\varphi}{\sqrt{\cos \varphi - \cos \varphi_0}} = \sqrt{\frac{2g}{l}} dt.$$

A periódus meghatározásához a fenti kifejezést kell integrálni a teljes körön, ami úgy is kiszámítható, hogy csak a negyed körön integrálunk ($0 \rightarrow \varphi_0$), majd a kapott értéket szorozzuk négyvel. Tehát

$$\frac{T}{4} = \sqrt{\frac{l}{2g}} \int_0^{\varphi_0} \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos \varphi - \cos \varphi_0}}$$

Felhasználva, hogy $\cos \varphi = 1 - 2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}$, a bal oldalon a nevezőben a gyök alatt

$$\cos \varphi - \cos \varphi_0 = 2 \left[\sin^2 \frac{\varphi}{2} - \sin^2 \frac{\varphi_0}{2} \right],$$

ezt behelyettesítve

$$\frac{T}{4} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\varphi_0} \frac{d\varphi}{\sqrt{\sin^2 \frac{\varphi}{2} - \sin^2 \frac{\varphi_0}{2}}}.$$

Innen kifejezve T -t kapjuk, hogy

$$T = 2 \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\varphi_0} \frac{d\varphi}{\sqrt{\sin^2 \frac{\varphi}{2} - \sin^2 \frac{\varphi_0}{2}}}$$

Az elsőfajú elliptikus integrálokkal való kapcsolatteremtés érdekében a következő helyettesítést végezzük:

$$z = \frac{\sin^2 \frac{\varphi}{2}}{\sin^2 \frac{\varphi_0}{2}} \quad \Rightarrow \quad dz = \frac{\cos \frac{\varphi}{2}}{2 \sin \frac{\varphi_0}{2}} d\varphi$$

Ekkor

$$T = 4 \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\varphi_0} \frac{\cos \frac{\varphi}{2}}{2 \cos \frac{\varphi}{2} \sin \frac{\varphi_0}{2} \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \frac{\varphi}{2}}{\sin^2 \frac{\varphi_0}{2}}}} d\varphi$$

A helyettesítés közben felhasználva, hogy

$$\cos^2 \frac{\varphi}{2} = 1 - \sin^2 \frac{\varphi}{2} = 1 - \left(z \sin \frac{\varphi_0}{2} \right)^2,$$

majd bevezetve a $\rho := \sin \frac{\varphi_0}{2}$ jelölést kapjuk, hogy

$$T = 4\sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-\rho^2 z^2)}}.$$

Tehát

$$T = 4\sqrt{\frac{l}{g}} F(1, \rho) = 4\sqrt{\frac{l}{g}} F\left(1, \sin \frac{\varphi_0}{2}\right),$$

ahol

$$F(x, k) = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2 t^2)}}$$

elsőfajú elliptikus integrál.

A

$$T = 4\sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-\rho^2 z^2)}}$$

összefüggés a $\theta = \arcsin z$ helyettesítéssel ismertebb alakra hozható, hiszen ekkor

$$d\theta = \frac{1}{\sqrt{1-z^2}} dz$$

és $z = \sin \theta$, így a megfelelő helyettesítéseket elvégezve, kapjuk, hogy

$$T = 4\sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1-\rho^2 \sin^2 \theta}} = 4\sqrt{\frac{l}{g}} E\left(\frac{\pi}{2}, \rho\right) = 4\sqrt{\frac{l}{g}} E\left(\frac{\pi}{2}, \sin \frac{\varphi_0}{2}\right),$$

ahol

$$E(\phi, k) = \int_0^\phi \frac{dt}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 t}}$$

elsőfajú elliptikus integrál Legendre⁶-féle alakja.

⁶ Adrien-Marie Legendre (1752. szeptember 18., Párizs - 1833. január 10., Párizs) francia matematikus. Statisztikával, számelmélettel, absztrakt algebrával és matematikai analízissel foglalkozott.

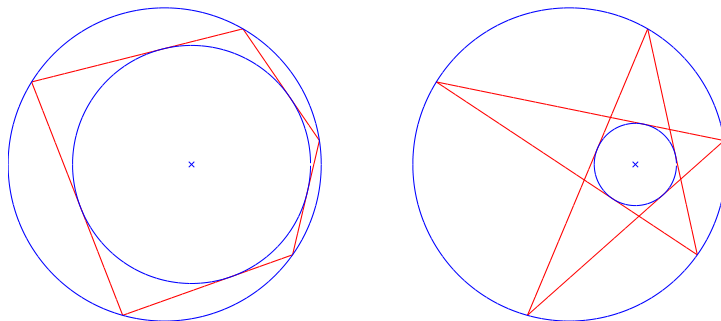
3.3. A Poncelet poligonok

A bevezetőben már említettük, hogy a dolgozathoz kapcsolódik egy Matlabban írt program, mely a matematikai inga mozgását felhasználva közelítő megoldást ad tetszőleges n esetén a Poncelet-tételre, azaz ha beolvassuk, hogy hány lépésben (n) szeretnénk, hogy záródjon a Poncelet poligon, akkor a program kirajzolja a két kört és a köztük cikázó zárt törött vonal határolta n oldalú, akár önátmetsző sokszöget.

Lássuk a megoldást! Az egyszerűség kedvéért válasszuk a külső nagy kört az origó középpontú egységnyi sugarú körnek. Tehát $R = 1$. A kérdés már csak az, hogy megadott n esetén hol legyen a másik kör középpontja, és mekkora legyen annak sugara ahhoz, hogy megkapjuk a kívánt n oldalú sokszöget.

Az ötlet az, hogy dolgozzunk az origóban felfüggesztett, egységnyi hosszúságú matematikai ingával. Ennek a legalább egyszeri körbefordulásával nyert pontok az origó középpontú, egységnyi sugarú körön lesznek. Ezekhez a pontokhoz természetesen az ingaegyenlet numerikus megoldásával juthatunk, amit a Matlabbal elég könnyen végre is hajthatunk. Ha n lépésben szeretnénk a záródást, akkor szükségünk van n darab pontra a külső körről, a mi esetünkben az inga megoldását alkotó pontok közül. A kérdés az, hogy mely pontokat válasszuk ahhoz, hogy a kiválasztott pontok által meghatározott sokszögbe kört tudjunk írni. Ehhez meghatározzuk az inga periódusát. Az így nyert T értéket elosztva n -nel, megkapjuk azt az időtartamot, amennyi idő alatt az inga megteszi a teljes kör n -ed részét ($t := \frac{T}{n}$). Ezt ismerve az $A_1 A_2 \dots A_n$ sorozat A_i -edik pontjának azt a pontot választjuk, ahol az inga a $t \cdot i$ -edik időpillanatban van. Az így kiválasztott pontok határozzák meg a Poncelet poligont. A pontok koordinátái az inga numerikus megoldásából a szögkitérés alapján könnyen meghatározhatók, melyeket ismerve megadhatók az n -szög oldalainak egyenletei is. Már csak a belső, a poligonba írt kör meghatározása maradt hátra. Mivel tudjuk, hogy a sokszögbe írt kör középpontja a sokszög szögfelezőinek a metszéspontja, a szögfelezők egyenleteinek meghatározása után a középpont koordinátái is megkaphatók. Ezek ismeretében a középpont és valamely $A_i A_j$ oldal távolsága megadja a kicsi kör sugarát. A gondolatmenetből kiderült, hogy minden csak az ingaegyenlet minél pontosabb megoldásán múlik, melynek csak a számítógép sebessége szab határt.

Végül lássunk két, a program segítségével rajzolt ábrát:



14. ábra. Poncelet tétele konvex és önátmetsző ötszögre

A. Függelék. Cayley-tétele körökre

Adottak a k és $l - R$ illetve r sugarú – körök a K és L mátrixok által. A középpontjaik távolsága d . A Cayley-tételnek megfelelően képezzük a $t \cdot K + L$ mátrixot. E mátrix determinánsának négyzetgyökét a t változó szerint sorbafejtve a következőt kapjuk:

$$\begin{aligned} & \sqrt{(1+t)[r^2 + (R^2 + r^2 - d^2)t + R^2t^2]} = \\ & = r + \frac{1}{2} \frac{(R^2 + 2r^2 - d^2)}{r} \cdot t + \left(\frac{1}{2} \frac{2R^2 + r^2 - d^2}{r} - \frac{1}{8} \frac{(R^2 + 2r^2 - d^2)^2}{r^3} \right) t^2 + \\ & + \left(\frac{1}{2} \frac{R^2}{r} - \frac{1}{4} \frac{(R^2 + 2r^2 - d^2)(2R^2 + r^2 - d^2)}{r^3} + \frac{1}{16} \frac{(R^2 + 2r^2 - d^2)^3}{r^5} \right) t^3 + \\ & + \left(-\frac{1}{8} \frac{2R^2(R^2 + 2r^2 - d^2) - (2R^2 + r^2 - d^2)^2}{r^3} + \frac{3}{16} \frac{(R^2 + 2r^2 - d^2)^2(2R^2 + r^2 - d^2)}{r^5} - \right. \\ & \left. - \frac{5}{128} \frac{(R^2 + 2r^2 - d^2)^4}{r^7} \right) t^4 + \dots \end{aligned}$$

A Cayley-tétel alapján a Poncelet szerkesztéssel rajzolt poligon n lépésben záródik, ha teljesülnek a következő összefüggések. Ezen feltételek teljesülése mellett végtelen sok olyan n -szög írható a k körbe, melyek oldalai egyidejűleg az l kört érintik.

$n = 3$ esetén: $|C| = 0$

$$\begin{aligned} & \frac{4r^2R^2 - R^4 + 2R^2d^2 - d^4}{8r^3} = 0 \quad \Leftrightarrow \\ & (-R^2 + 2rR + d^2)(R^2 + 2rR - d^2) = 0 \end{aligned}$$

$n = 4$ esetén: $|D| = 0$

$$\begin{aligned} & -\frac{2r^2R^4 - 2r^2d^4 - R^6 + 3R^4d^2 - 3R^2d^4 + d^6}{16r^5} = 0 \quad \Leftrightarrow \\ & (R - d)(R + d)(-R^4 + 2R^2d^2 + 2r^2R^2 - d^4 + 2r^2d^2) = 0 \end{aligned}$$

$n = 5$ esetén: $\begin{vmatrix} C & D \\ D & E \end{vmatrix} = 0$

$$\begin{aligned} & 16r^4d^4 + 24r^2R^2d^4 - 8r^2R^6 - 16r^2d^6 + \\ & + 5R^8 + 5d^8 - 20R^6d^2 + 30R^4d^4 - 20R^2d^6 = 0 \end{aligned}$$

$n = 6$ esetén: $\begin{vmatrix} D & E \\ E & F \end{vmatrix} = 0$

$$\begin{aligned} & -70R^4d^6 + 48r^4R^2d^4 + 32r^6d^4 - 48r^4d^6 - 10r^2R^8 + 30r^2d^8 + \\ & + 35R^2d^8 - 35R^8d^2 + 70R^6d^4 + 60r^2R^4d^4 - 80r^2R^2d^6 + 7R^{10} - 7d^{10} = 0 \end{aligned}$$

$$n = 7 \text{ esetén: } \begin{vmatrix} C & D & E \\ D & E & F \\ E & F & G \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{aligned} &128r^8d^4 + 192r^6R^2d^4 + 240r^4R^4d^4 - 480r^4R^2d^6 - 256r^6d^6 + 21R^{12}+ \\ &+ 21d^{12} + 240r^4d^8 - 560r^2R^4d^6 + 420r^2R^2d^8 + 280r^2R^6d^4 - 28r^2R^{10}- \\ &- 112r^2d^{10} - 420R^6d^6 + 315R^4d^8 - 126R^{10}d^2 + 315R^8d^4 - 126R^2d^{10} = 0 \end{aligned}$$

$$n = 8 \text{ esetén: } \begin{vmatrix} D & E & F \\ E & F & G \\ F & G & H \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{aligned} &-1680r^2R^6d^6 + 1890r^2R^4d^8 + 630r^2R^8d^4 - 1008r^2R^2d^{10} - 33d^{14} + 33R^{14}+ \\ &+ 1155R^6d^8 - 231R^{12}d^2 + 693R^{10}d^4 - 693R^4d^{10} - 1155R^8d^6 + 231R^2d^{12}- \\ &- 560r^4d^{10} + 560R^6r^4d^4 + 1680R^2r^4d^8 - 1680R^4r^4d^6 - 640r^8d^6 + 256r^{10}d^4+ \\ &+ 800r^6d^8 - 42r^2R^{12} + 210r^2d^{12} + 480R^4r^6d^4 - 1280R^2r^6d^6 + 384R^2r^8d^4 = 0 \end{aligned}$$

B. Függelék. Körsorok

B.1. Értelmezés. Az $O_a(u_a, v_a)$ középpontú R_a sugarú a kör egyenlete:

$$(x - u_a)^2 + (y - v_a)^2 = R_a^2.$$

Vigyünk mindent bal oldalra, és az így megjelenő polinomot, mint x és y függvényét, jelöljük $a(x, y)$ -nal. Tehát

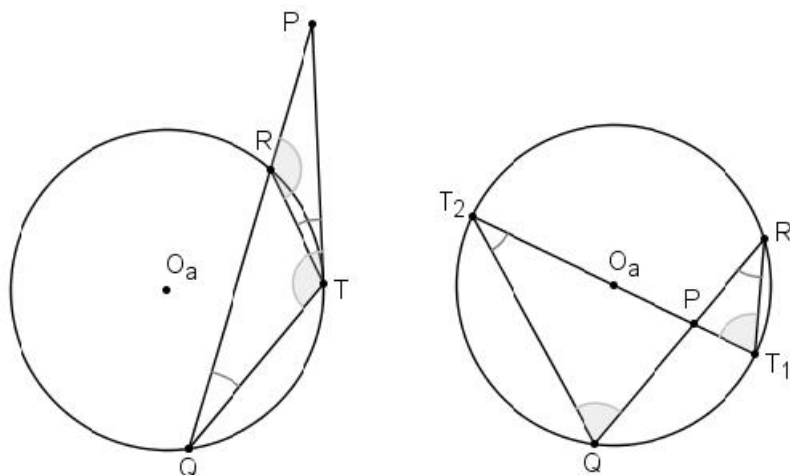
$$a(x, y) := (x - u_a)^2 + (y - v_a)^2 - R_a^2.$$

Ha a $P(\xi, \eta)$ pont illeszkedik a körre, akkor $a(\xi, \eta) = 0$, különben nem. Mivel

$$(\xi - u_a)^2 + (\eta - v_a)^2$$

az O_aP szakasz hosszának négyzetét adja meg, ezért ha $a(\xi, \eta)$ értéke negatív, az azt jelenti, hogy $O_aP^2 < R_a^2$, azaz P az a kör belsejében helyezkedik el. Ha pedig $a(\xi, \eta)$ értéke pozitív, akkor P a körön kívül van, és $a(\xi, \eta)$ a P -ből a körhöz húzott érintő hosszának négyzetét adja meg.

Sőt, mind a pozitív, mind a negatív esetben az is igaz, hogy a P -n át a körhöz húzott tetszőleges szelőnek a körrel vett R, Q metszéspontjaira a $PR \cdot PQ$ érték állandó, azaz független a szelő megválasztásától. Ezt az állandó értéket a P pont *a körre vonatkozó hatványának* nevezzük, és értéke egyenlő $O_aP^2 - R_a^2$ -tel, tehát $a(\xi, \eta)$ értékével.



15. ábra. A $PQ \cdot PR$ érték független a szelő megválasztásától

A fentiek alapján azt mondjuk, hogy az

$$a(\xi, \eta) = t$$

egyenletet azok a pontok elégítik ki, amelyeknek az a körre vonatkozó hatványa t .

Legyen az a -tól különböző b kör, melynek egyenlete:

$$b(x, y) = (x - u_b)^2 + (y - v_b)^2 - R_b^2 = 0.$$

Keressük azokat a pontokat, melyekből az a -hoz és a b -hez húzott érintő szakaszok hosszának aránya egy adott érték. Általánosabban, legyen c azon pontok mértani helye a síkban, melyeknek az a körre vonatkozó hatványa úgy aránylik a b körre vonatkozó hatványhoz, mint α a β -hoz. Ekkor a c halmaz egyenlete:

$$\beta a(x, y) - \alpha b(x, y) = 0. \quad (4)$$

Az így előállított alakzat is kör (esetleg pont) vagy $\alpha = \beta$ esetén egy egyenes, hiszen a (4) olyan kétváltozós egyenlet, melyben nem szerepel xy -os tag, és a másodfokú tagok együtthatói megegyeznek.

B.2. Értelmezés. A $\beta a(x, y) - \alpha b(x, y) = 0$ alakú görbék halmazát az a és b generálta körsornak nevezzük.

Megjegyzés: A körsort bármelyik két tagja meghatározza, mivel bármelyik két eleméből megkapható az összes többi elem egyenleteik lineáris kombinációival.

Megjegyzés: Ha a és b egy körsor két különböző köre, c pedig a körsor tetszőleges eleme, akkor c különböző pontjainak az a -ra és b -re vonatkozó hatványainak aránya megegyezik.

Hivatkozások

- [1] Darboux, Gaston: *Principes de Géométrie Analytique*, Gauthier-Villars et Cie Éditeurs, Paris, 1917.
- [2] Hajós György: *Bevezetés a geometriába*, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 1999.
- [3] Herr, Ulrike: *Über das Theorem von Poncelet*, Staatsexamensarbeit, Johannes Gutenberg Universität, Mainz, 2000.
- [4] Hráskó András: *Geometria tételek a harmadrendű görbe csoporttulajdonságával összefüggésben*, PhD értekezés, Eötvös Loránd Tudományegyetem, Budapest, 2005
- [5] Lebesgue, Henri: *Les Coniques*, Gauthier-Villars Imprimeur-Édituer, Paris, 1942.
- [6] Pogáts Ferenc: *Vektorok, koordinátageometria, trigonometria*, Typotex, Budapest, 2005.
- [7] Poncelet, Jean-Victoir: *Traité des propriétés projectives des figures*, Párizs, 1822.
- [8] Reiman István: *Geometria és határterületei*, Szalay Könyvkiadó és Kereskedőház, Kisújszállás, 1999.
- [9] Sain Márton: *Nincs királyi út*, Gondolat Kiadó, Budapest, 1986.
- [10] Sain Márton: *Matematikatörténeti ABC*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1977.
- [11] Stoyan Gisbert: *Matlab*, Typotex, Budapest, 2008